ІНТЕГРАТИВНИЙ ОБРАЗ ЯК ФОРМА РЕАЛІЗАЦІЇ ІНТЕГРАТИВНОГО ПІДХОДУ У НАВЧАННІ

Василь КУШНІР, Ренат РІЖНЯК (Кіровоград)

В статті досліджуються проблеми формування в суб'єктів навчання узагальнених умінь математичної діяльності шляхом формування основних типів інтегративних образів навчального матеріалу.

В статье исследуются проблемы формирования у субъектов обучения обобщенных умений математической деятельности путем формирования основных типов интегративных образов учебного материала.

Ключові слова: інтеграція, інтегрований образ задачі, інтегрований образ задачної теми, інтегрований образ способу розв'язання задачі, інтегративна діяльність учнів.

Інтеграція математичних знань та умінь на сьогодні відіграє важливу роль в організації навчальної діяльності учнів (студентів) і стає визначальним фактором визначення способів регулювання такою діяльністю: набуття системних знань про об'єкт вивчення і формування зв'язків між компонентами цих знань; визначення та дослідження особливостей перетворення об'єкта, котрий вивчається; формування правил добору та послідовності застосування необхідних інструментів для дослідження об'єкта, оцінка можливості використання загальноприйнятого інструментарію до вивчення об'єкта. Спочатку такі способи регулювання навчальною діяльністю є предметом засвоєння, а вже після формування умінь їх застосування суб'єктами навчальної діяльності перетворюються у способи регулювання саме навчальною діяльністю інтегративного характеру. Реалізація інтегративного підходу у навчанні дає можливість розглядати зміст, форми та методи навчання окремої дисципліни (або її розділу) саме у процесі взаємодії зі змістом, формами та методами інших навчальних дисциплін (або інших її розділів), співставляти закономірності та закони об'єкта або предмету вивчення із закономірностями та законами природи.

Раніше нами були наведені результати дослідження щодо використання інтеграції професійних знань майбутніх учителів математики, розроблена та апробована система критеріїв сформованості інтегрованих професійних знань вчителів та створена модель підвищення ефективності професійної підготовки майбутніх вчителів математики на основі інтегративного підходу [1]. Робота [2] є одним з досліджень, що присвячені вивченню зв'язків інтегративного характеру між розв'язуванням математичних задач та моделюванням. У роботі продемонстровано, що **створення моделі задачної ситуації у вигляді**

матриці інформації дає можливість повно і ефективно провести етап матеріалізації розумових дій суб'єкта навчання у знаковій формі і дозволяє моделювати процес розв'язування задачної ситуації у вигляді послідовностей моделей його етапів. У роботах [3] та [4] ми дійшли висновку, що інтегративна лінія у шкільному курсі математики поступово знаходить більш детальну реалізацію у використанні **навчальних математичних задач інтегративного змісту.** Це задачі творчого характеру; задачі з потужним математичним змістом та складною структурою взаємозв'язків між компонентами їх фабули; задачі, що мають потенціал створення на їх базі нових задач та серій задач. Розв'язування таких задач потребує від суб'єктів навчання глибоких знань та винахідливості; тут не лише використовуються знання учнів з певної теми, а й виникає необхідність проведення систематизації та узагальнення здобутих знань з різних розділів шкільної математики (а то й з інших навчальних дисциплін) в плані актуалізації основних змістовних ліній шкільної математики, що в свою чергу вимагає сформованості у суб'єкта навчання певного рівня математичної та інформаційної культури. У роботі [5] на прикладі використання різних способів розв'язування однієї задачі ми зробили висновок про формування в учнів відповідних інтегративних знань і умінь у формі **інтегративного образу задачі**, під яким розуміли цілісну структуру знань, умінь та навичок, якою необхідно володіти учневі (суб'єкту навчання) для дослідження задачі на предмет її розв'язування та вивчення. У роботах [6], [7] та [8] ми, використавши подібні методи дослідження, описали тлумачення понять **інтегративний образ задачної теми**, **інтегративний образ способу розв'язання задачі** та **інтегративний образ способу доведення математичного речення**, детально розглянувши їх структуру та роль у контексті формування ключових та математичних компетентностей школярів [9].

У даній статті автори мають намір детально **розглянути модель навчального процесу з погляду реалізації інтегративного підходу**, а саме **визначити місце та роль інтегрованих образів** (описаних у розумінні [5]–[8]) **у формуванні узагальнених математичних умінь в суб'єктів навчання та у побудові моделі навчального процесу з реалізацією інтегративних компонентів**.

На прикладі задачі про вписування у кут заданої величини послідовності кіл розглянемо усі можливі інтегровані образи, які можуть бути при цьому побудовані. Потім проаналізуємо структуру кожної групи інтегрованих образів і таким чином проаналізуємо розв'язання питання про доцільність формування узагальнених умінь у суб'єктів навчання через формування інтегрованих образів.

Задача 1. *У кут, що містить 60°, в бік, протилежний до вершини кута, вписано 5 кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ всіх п'яти відповідних кругів більша за площу найменшого круга?.*

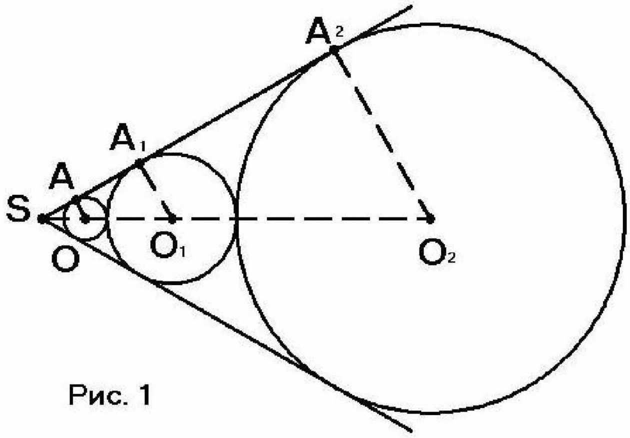


Рис. 1

Визначимо структуру **інтегрованого образу задачі**, застосувавши до її розв'язування кілька різних способів. Скористаємося способом розбиття даної задачі на підзадачі.

Спочатку розбиваємо текст задачі на частини: а) у кут, що містить 60°, вписується коло; б) в цей же кут вписується ще 4 кола, кожне наступне з яких, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього; в) знаходиться площа найменшого круга; г) знаходиться сума площ всіх 5 кругів; д) порівнюється $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$ і S_1.

Спочатку будуємо кут 60° (рис. 1). Далі постає питання − як у кут, рівний 60°, вписати коло радіусу R, яке буде дотикатися до його сторін? Фактично, це і є перша використана нами *допоміжна модель задачі*. Проаналізувавши ситуацію, приходимо до висновку, що центр даного кола знаходитиметься на бісектрисі даного кута , а дане коло будується за допомогою прямокутного трикутника (так як $\angle ASO = \frac{1}{2}\cdot 60^0 = 30^0$, то ΔSAO – прямокутний з гострими кутами 30^0 та 60^0, а тому $SO = 2OA$). Далі ставимо таку задачу (друга *допоміжна модель задачі*): *Дано кут , рівний 60°, і вписане в нього коло, яке дотикається до сторін цього кута. Вписати в цей кут коло так, щоб воно дотикалось до сторін кута і до даного кола.*

З'ясовуємо, що центр цього кола буде лежати також на бісектрисі даного кута, позначаємо через R_1 радіус шуканого кола, з'ясовуємо подібність трикутників SAO та SA_1O_1, визначаємо у цих трикутниках пари пропорційних сторін:

$$\frac{OA}{SO} = \frac{O_1A_1}{SO_1} = \frac{1}{2},$$

визначаємо з останньої рівності $O_1A_1 = \frac{1}{2}SO_1$, враховуємо рівності $O_1A_1 = R_1$ та $SO_1 = 3R + R_1$, приходимо до висновку $R_1 = 3R$. Отже, здійснивши ряд міркувань, приходимо до висновку, що радіус шуканого кола буде втричі більший, ніж радіус даного кола. Побудова трьох наступних кіл аналогічна до попередньої побудови. Далі визначається факт, що радіуси всіх п'яти кіл відносяться як:

$$R : R_1 : R_2 : R_4 : R_5 = 1 : 3 : 9 : 27 : 81.$$

Таке виконання обґрунтування до рисунку робить зрозумілим і подальший хід розв'язання задачі, оскільки у процесі розв'язування кожної з підзадач даної задачі (або допоміжних моделей основної задачі) стає відомим відношення радіусів всіх п'яти кіл.

Це дає змогу з'ясувати ряд нових питань, відповідь на які дасть можливість виконати необхідні обчислення: а) як відносяться площі подібних фігур (якщо відомим є відношення їх лінійних елементів)? б) як знайти відношення площ всіх 5 кругів? в) як можна позначити суму площ всіх 5 кругів? г) як відносяться сума площ 5 кругів і площа найменшого круга? Розв'язання даної задачі полягає у виконанні певних аналітичних викладок:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5}{S_1} = 1 + 3^2 + 9^2 + 27^2 + 81^2 = 7381.$$

Скористаємося іншим способом, який полягає в тому, що за допомогою деякого прийому ми перетворюємо дану задачу в більш просту, знайому учням, еквівалентну задачу. Переформулюємо задачу так: *У кут, що містить 60°, в бік, протилежний до вершини кута, вписано 5 кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього. Перше коло має радіус 1. У скільки разів сума площ всіх п'яти відповідних кругів більша за площу найменшого круга?*

При цьому ми маємо конкретизацію моделі задачі. Але процес розв'язування конкретизованої моделі передбачає доведення факту еквівалентності цієї моделі та основної задачі.

Скористаємося кодуванням умови задачі, тим самим ще раз змінимо спосіб розв'язування. Запропонуємо розв'язати задачу, здійснивши перехід від геометричної мови до алгебраїчної − представивши компоненти умови задачі у вигляді зростаючої геометричної прогресії, перший член якої рівний S_1, а знаменник 3^2. Тоді задача зводиться до знаходження співвідношення між сумою перших п'яти членів геометричної прогресії та її першим членом:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5}{S_1} = \frac{S_1 \cdot \left(9^5 - 1\right)}{(9-1) \cdot S_1} = 7381.$$

На відміну від 2-го методу, де заміна відбувається в межах однієї й тієї ж задачі та мови, даний спосіб розв'язування передбачає перехід від однієї мови до іншої за допомогою кодування об'єктів задачі. В розглянутій задачі відбувається перехід від геометричної мови (знаходження площі круга) до алгебраїчної (використання геометричної прогресії для знаходження суми площ 5 кругів і порівняння її з площею найменшого круга). З метою визначення змісту інтегративної навчальної діяльності учнів у процесі розв'язування задачі різними способами здійснимо структурний аналіз компонентів інтегрованого образу задачі та аналіз необхідних знань та умінь (а також їх взаємозв'язків), які слід актуалізувати та відтворити при виконанні розв'язування. Результати такого аналізу представимо у вигляді ієрархії компонентів інтегрованого образу задачі у розрізі: *основні поняття*, засвоєння або знання яких необхідне для розв'язання задачі обраним методом; основні *математичні дії та уміння*, виконання яких має бути сформоване в учнів для вільного оперування математичним та логічним апаратом у процесі розв'язування; *узагальнені дії*, що мають бути сформовані для оволодіння обраним для розв'язування методом (схема 1).

Схема 1

Визначимо тепер структуру **інтегрованого образу задачної теми**, що була задана задачею 1. Для цього можемо піти по шляху ускладнення умови задачі, сформулювавши її так.

Задача 2. *У кут величиною α в бік, протилежний від вершини, вписано 5 кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ всіх п'яти відповідних кругів більша за площу найменшого круга?*

Розглянувши подібність трикутників SAO та SA_1O_1 (рис. 1), визначимо, що:

$$\frac{OA}{SO} = \frac{O_1A_1}{SO_1} = \cos\angle AOS = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Шляхом проведення нескладних міркувань отримуємо співвідношення між радіусами першого та другого вписаних кіл:

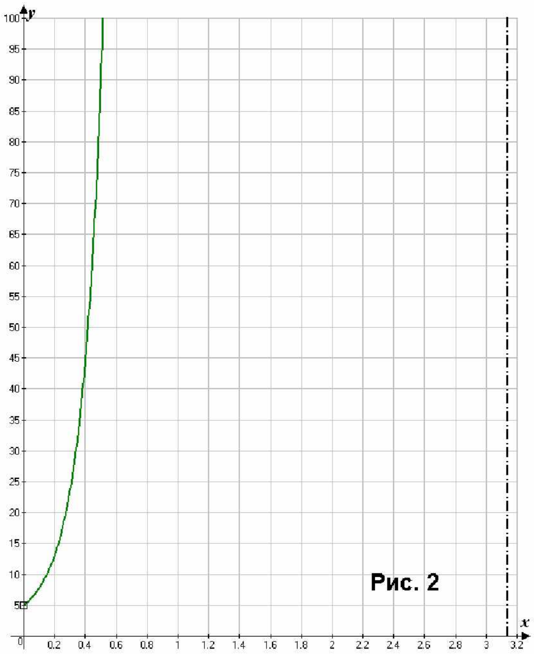
$$O_1A_1 = OA \cdot \frac{SO_1}{SO} = OA \cdot \frac{SO + AO + A_1O_1}{SO} = OA \cdot \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{A_1O_1 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{AO}\right);$$

Звідси маємо: $O_1A_1 = OA \cdot \dfrac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$. Встановлюємо, що радіус наступного кола відрізняється від радіуса попереднього множником $\dfrac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$, робимо висновок, що площі всіх п'яти кіл утворюють зростаючу геометричну прогресію, перший член якої дорівнює S_1, а знаменник $\left(\dfrac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2$. Відповідь (для подальшої роботи з задачею позначимо відповідь $f(\alpha)$) до задачі знаходимо у вигляді:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{S_1 \cdot \left(\left(\left(\dfrac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right)^5 - 1\right)}{\left(\left(\dfrac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - 1\right) \cdot S_1} = \left(\left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right)^4 + \left(\left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right)^3 + \left(\left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + 1 = f(\alpha)$$

Задача 2, по суті, є узагальненням першої задачі – а тому рівень умінь, необхідних для її розв'язання, очевидно вищий, ніж тих, що необхідні для розв'язання задачі 1. Пізніше ми це продемонструємо у вигляді схеми. Продовжимо роботу над задачною темою, розширивши поле можливостей учня (див. [10]), а, отже, і інтегративний образ задачної теми, до роботи над задачею дослідницького характеру.

Задача 3. *У кут величиною* α *в бік, протилежний до вершини кута, вписано 5 кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ всіх п'яти відповідних кругів більша за площу найменшого круга? Дослідити, при якому значенні кута* α *вказане відношення буде найбільшим (найменшим). Скласти та розв'язати аналогічні задачі, які б розв'язувалися з використанням формули суми нескінченої геометричної прогресії. Самостійно вибравши засоби, провести дослідження розв'язків цих задач.*



Дослідження розв'язку задачі можна провести і аналітично, виявивши властивості функції $f(\alpha)$, яка є відповіддю до задачі 2. Але, зважаючи на обсяг завдання в даній ситуації, доречним буде використання ІКТ (наприклад, програми "Advanced Grapher" [11]). Тому, задавши функцію $f(\alpha)$, будуємо її графік на інтервалі $\alpha \in (0;\pi)$ (очевидно, що інші значення аргументу нас не цікавлять). З рис. 2 бачимо, що при $x \to 0^+$ значення функції наближається до числа 5, а при $x \to \pi$ $f(\alpha) \to \infty$. Це легко перевірити, записавши функцію у вигляді:

$$f(\alpha)=\frac{\left(\left(\dfrac{1+\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1-\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2\right)^5-1}{\left(\dfrac{1+\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1-\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2-1}$$

та взявши відповідні границі. Отже, ні мінімального, ні максимального значення відношення площ не досягається. Зрозуміло лише, що при значеннях α, близьких до 0, відношення площ прямує до числа 5, а чим більше значення α з проміжку $(0;\pi)$, тим більшим буде і відношення. Виконуючи наступне завдання задачі 3, можна запропонувати такі умови нових задач:

А. *У кут величиною α вписане коло, а потім у бік до вершини кута вписані безліч кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ всіх вписаних кругів більша за площу найбільшого круга.*

Б. *У кут рівний α у бік до вершини кута вписані квадрати ABCD, $DB_1C_1D_1$, $D_1B_2C_2D_2$ і т.д., причому AB=a. Знайти відношення суми площ квадратів $DB_1C_1D_1$, $D_1B_2C_2D_2$, ... , $D_{n-1}B_nC_nD_n$ до площі квадрата ABCD.*

В. *В кут рівний α у бік до вершини кута вписані рівносторонні трикутники ABC, CB_1C_1, і т.д., причому AB=a і точки A, C, C_1 і т.д. лежать на одній із сторін кута. Знайти відношення суми площ трикутників CB_1C_1, $C_1B_2C_2$ і т.д. до площі трикутника ABC.*

Г. *В рівносторонній трикутник ABC, вписане коло, в яке вписаний рівносторонній трикутник $A_1B_1C_1$, і т.д. Знайти відношення суми площ трикутників $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$,…, $A_nB_nC_n$ до площі трикутника ABC, якщо AB=a.*

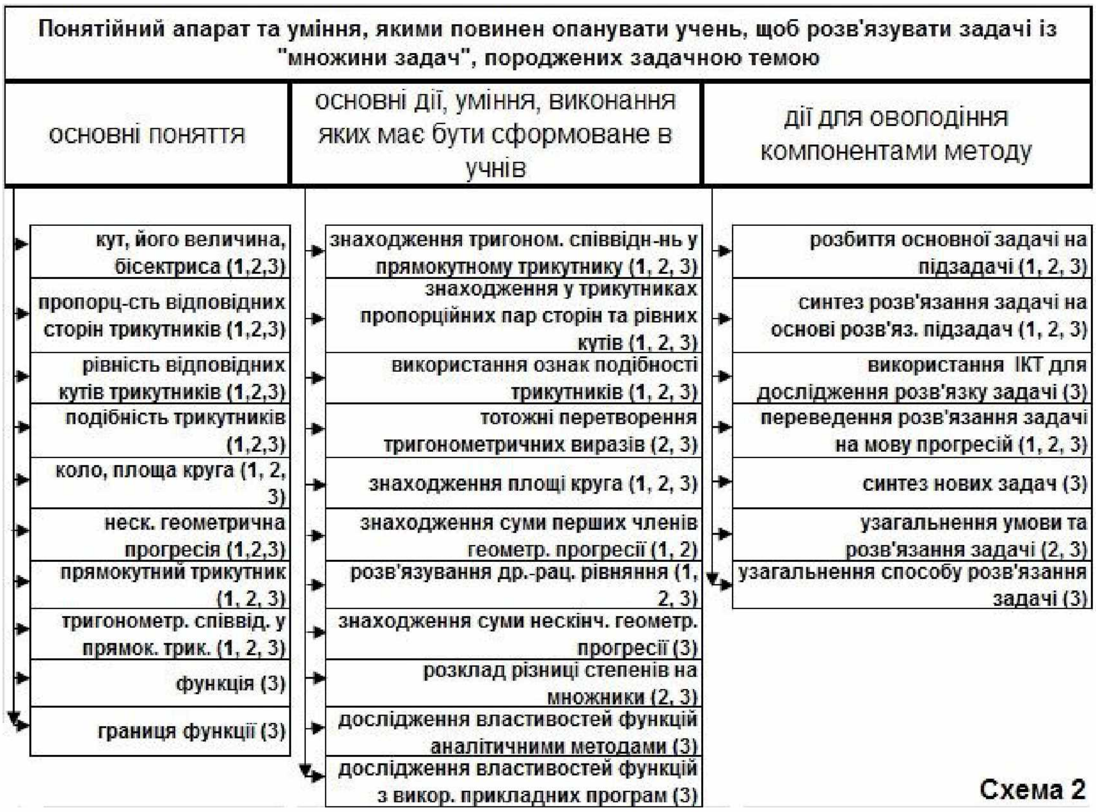


Схема 2

З метою визначення змісту інтегративної навчальної діяльності учнів у процесі роботи із задачними темами здійснимо структурний аналіз компонентів інтегрованого образу задачної теми та аналіз необхідних знань та умінь (а також їх взаємозв'язків), які слід актуалізувати та відтворити при виконанні зазначеної роботи. Результати такого аналізу показані на схемі 2 у вигляді ієрархії компонентів інтегрованого образу задачної теми, яка сама по собі у практичному використанні є досить корисною; особливо це стосується підготовки на базі таких структурних аналізів уроків узагальнення та систематизації знань та умінь учнів, планування та проведення результативних уроків формування або застосування знань та умінь або розробки з використанням подібних деталізованих схем системи завдань навчального характеру або завдань для вимірювання навчальних досягнень учнів. Схема 2 ілюструє детальний аналіз компонентів інтегрованого образу задачної теми в залежності від *рівня (репродуктивного, продуктивного, творчого) умінь, необхідних для розв'язування задачі* з «множини задач», що породжена задачною темою, у розрізі: *основні поняття*, засвоєння або знання яких необхідне для розв'язування або дослідження конкретної задачі; основні *математичні дії та уміння*, виконання яких має бути сформоване в учнів для вільного оперування математичним апаратом у процесі розв'язування; *узагальнені дії*, що мають бути сформовані для оволодіння загальними прийомами розв'язування та дослідження задачі. Схема 2, по суті, є об'єднанням в одній схемі можливих у даній «множині задач» компонентів інтегрованого образу задачної теми. Основні поняття, основні математичні дії та уміння, узагальнені дії, формування яких є необхідним для розв'язування конкретних задач з «множини задач», вказані на схемі 2 з відповідними номерами, що відповідають задачам 1, 2 та 3.

Визначимо тепер структуру **інтегрованого образу способу розв'язування задачі**, що був використаний при розв'язуванні задачі 1. Оберемо спосіб розв'язування задачі з використанням розв'язуючої моделі у вигляді прогресії. Для аналізу структури інтегрованого образу способу розв'язування задачі запропонуємо кілька задач.

Задача 4. *Знайти добуток n-перших членів геометричної прогресії, якщо відомо їхню суму S_1 та суму S_2 їх обернених величин.*

Задача 5. *Довести твердження: для того, щоб три числа x, y та z у зазначеному порядку утворювали геометричну прогресію, необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність* $(x^2+y^2)\cdot(y^2+z^2)=(xy+yz)^2$.

Задача 6. *Турист, піднімаючись вгору, за першу годину досягнув висоти 800 м, а за кожну наступну годину піднімався на висоту, на 25 м меншу, ніж за попередню. За скільки годин він досягне висоти 5700 м?*

З метою визначення змісту інтегративної навчальної діяльності учнів у процесі розв'язування зазначених математичних задач наперед заданим способом (з використанням властивостей прогресій) здійснимо структурний аналіз компонентів інтегрованого образу способу розв'язування та аналіз необхідних знань та умінь (а також їх взаємозв'язків), які слід актуалізувати та відтворити при виконанні зазначених завдань. Не вдаючись до детальної ілюстрації розв'язувань задач 4-6 представимо результати такого аналізу аналогічно до попередніх випадків на схемі 3 у вигляді ієрархії компонентів інтегрованого образу способу розв'язування у розрізі: *основні поняття*, засвоєння або знання яких необхідне для розв'язування задачі обраним методом або способом; основні *математичні дії та уміння*, виконання яких має бути сформоване в учнів для вільного оперування математичним апаратом у процесі розв'язування; *узагальнені дії*, що мають бути сформовані для оволодіння обраним для розв'язування способом.

Об'єднавши в одній схемі варіанти формування інтегрованих образів задачі, задачної теми та способу розв'язування задачі, отримаємо перелік складних математичних умінь, які розіб'ємо на взаємопов'язані класи за належністю до різних змістовних ліній шкільного курсу математики.

Схема 3

На схемі 4 зображений результат систематизації – об'єднання класів компонентів інтегрованих образів, що пов'язані з формуванням умінь розв'язувати задачу 1. Зв'язки між класами та компонентами інтегрованих образів і становлять продукт операції синтезу нових знань учнів, що набуваються у процесі реалізації різноманітних підходів до засвоєння вказаного матеріалу. Схема 4 ілюструє реалізацію інтегративних компонентів при побудові моделі навчального процесу, пов'язаного з формуванням узагальнених умінь оперування з конкретним змістом навчального матеріалу – із сюжетом задачі 1.

Межі даної статті потребують деталізації та розкриття методичних умов, при яких використання у процесі реального навчання формування інтегрованих образів описаних типів буде набувати методичної доцільності у контексті формування в учнів знань та умінь інтегративної діяльності при продуктивному оперуванні математичним матеріалом. У якості згаданих умов за матеріалами дослідження можна вказати такі:

– Формування кожного інтегрованого образу відбувається у процесі детального аналізу та порівняння ознак та характеристик окремих компонентів об'єкту вивчення.

– Вибір обсягу інтегрованого образу проводиться з врахуванням загальної мети організації навчальної діяльності учнів (або суб'єктів навчання); інакше кажучи – проблема вибору типу чи обсягу є свого роду евристикою, а отже проблемою поставленої мети і залежить лише від планування вчителем можливої (або необхідної) широти поля можливостей навчальної діяльності учнів [10]. Отже, кінцевий результат формування інтегрованого образу одного з описаних типів залежать від мети, поставленої вчителем чи викладачем.

– При формуванні кожного з інтегрованих образів вчитель (викладач) організовує процес мисленого об’єднання компонентів інтегрованого образу за їх істотними ознаками; а тому при проведенні описаної навчальної роботи продуктивним для використання є метод узагальнення знань та умінь учнів. У процесі планування та підготовки формування інтегрованого образу здійснюється розподіл компонентів інтегрованого образу на взаємопов’язані класи за найбільш істотними ознаками по їх подібності; у процесі безпосереднього формування інтегрованого образу відбувається систематизація – об’єднання класів компонентів інтегрованого образу у єдину цілісність з подальшим синтезом нових знань. Результат інтеграції знань, умінь та навичок, що мають бути актуалізованими для роботи з обраною задачею (у нашому випадку це задача 1), зображений на схемі 4.

Схема 4

Отже, проведене дослідження дає підстави підтвердити доцільність використання інтегрованих образів (описаних у розумінні [5]–[8]) у формуванні узагальнених математичних умінь в суб’єктів навчання та у побудові моделі навчального процесу з реалізацією інтегративних компонентів. Тоді результатом такої діяльності буде синтез нових знань

– зв'язків між отриманими класами компонентів та самими компонентами – і, як наслідок, формування цілісного уявлення про предмет вивчення. Більше того, до сформованого кінцевого продукту – згаданої сукупності інтегрованих образів – буде належати і сама інтеграція основних прийомів та методів дослідницької діяльності. Саме це і має забезпечити формування в учнів знань та умінь інтегративної математичної діяльності.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. В. Нічишина, Р. Ріжняк. Інтеграція професійних знань майбутніх вчителів математики. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2007. – 92 с.
2. В. Кушнір, Г. Кушнір, Р. Ріжняк. Системне моделювання процесу розв'язування текстових математичних задач: кібернетичний підхід // Постметодика. – 2009. – № 4 (88). – с. 22-27.
3. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв'язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – № 5. – с. 13-17.
4. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Розв'язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп'ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – с. 34-39.
5. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Інтеграція математичних знань та умінь при використанні різних способів розв'язування задач // Постметодика. – 2010. – № 2 (93). – с. 24-31.
6. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Формування в учнів умінь інтегративної діяльності з використанням наборів математичних задач, утворених задачною темою // Наукові записки. – Випуск 90. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка. – 2010 (с. 156-161).
7. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Інтеграція знань та умінь учнів при універсалізації способу розв'язування різних математичних задач. // Математика в школі. – 2011. – № 4. – с. 26-31.
8. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Інтеграція знань та умінь учнів при використанні різних методів доведення математичних речень // Наукові записки. – Випуск 90. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка. – 2011.
9. С.А. Раков. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
10. В. Кушнір. Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.
11. http://www.serpik.com/

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ:

Кушнір Василь Андрійович – доктор педагогічних наук, професор кафедри педагогіки Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка; наукові інтереси – інноваційні методи навчання математики.

Ріжняк Ренат Ярославович – кандидат педагогічних наук, професор кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка, наукові інтереси – інтегративні знання як умова регулювання навчальної діяльності.

Коло наукових інтересів: дослідження методологічних проблем педагогічного процесу.